

SAGE MATRIX CALCULATOR AND FULL SAGE CONTENTS FOR LINEAR ALGEBRA

Sage 행렬계산기와 선형대수학 Sage 콘텐츠

SANG-GU LEE*, KYUNG-WON KIM AND JAE HWA LEE

ABSTRACT. For over 20 years, the issue of using an adequate CAS tool in teaching and learning of linear algebra has been raised constantly. And a variety of CAS tools were introduced in many linear algebra textbooks. In Korea, however, because of some realistic problems, they have not been introduced in the class and the theoretical aspect of linear algebra has been focused on in teaching and learning of it.

In this paper, we suggest Sage as an alternative for CAS tools overcoming the problems mentioned above. And, we introduce full contents for linear algebra and matrix calculator that Sage was used to develop. Taking advantage of them, almost all the concepts of linear algebra can be easily covered and the size of matrices can be expanded without difficulty.

I. 서론

지난 20여 년간 선형대수학 교수학습과정에서 공학적 도구의 필요성이 지속적으로 제기되어 왔다.¹⁾ 미국을 포함한 선진국의 선형대수학 교수학습과정에서는 다양한 공학적 도구가 개발되고 실제로 활용되었다[14–16, 18, 19, 21, 23–26]. 그리고 한국에서도 선형대수학 교재를 통하여 관련된 다양한 공학적 도구가 소개되었다[1, 7–9, 11]. 그러나

Received February 9, 2013. Revised April 3, 2013. Accepted April, 4, 2013.

2010 Mathematics Subject Classification : 97B40, 97C80, 97U50, 97U70

Key words and Phrases : Linear Algebra, Sage, Matrix calculator, Web contents

*Corresponding author.

©The Kangwon-Kyungki Mathematical Society, 2013.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

1) <http://www1.umassd.edu/SpecialPrograms/Atlast/>

교육현장에서는 다양한 현실적인 이유로 선형대수학과 관련된 공학적 도구의 활용은 미진하였다. 따라서 아직도 한국의 선형대수학 교육은 이론 교육의 한계를 벗어나지 못하였다. 실제 공학적 도구를 이용하지 않고서는 행렬의 크기가 3차를 넘어서는 행렬계산을 하기가 어렵고, 만약 할 수 있다라도 시간이 오래 걸린다. 그리고 실제 생활에서 주어지는 문제들은 대부분 큰 차수의 계산을 요구하지만 그에 대한 교육은 제대로 이뤄지지 못하고 있다.

교육과학기술부가 최근 발표한 “수학교육 선진화 방안”[3]에 따르면 이전의 입시대비 변별력 확보를 위한 수학교육을 미래대비 사고력과 창의력을 키우는 방향으로 개선하기 위해 중·고교 단계에서부터 공학적 도구를 활용할 수 있는 기반을 마련하고 있다. 우리나라는 지난 십여 년 동안 수학교육에 계산기, 컴퓨터 및 각종 매체를 도입하려는 시도가 활발히 이루어져왔으며, 여러 수학교육관련 학회나 모임에서도 국내외에서 다양하게 개발, 보급된 공학적 도구들을 어떻게 실제 수업에 적용할 것인지에 대한 연구와 개발이 꾸준히 이루어져 왔다[2, 4, 5, 10, 12, 13].

이렇듯 수학교육에 있어 공학적 도구 도입의 필요성에 대한 긍정적인 인식에도 불구하고 이를 현장 수업에 효과적으로 적용하는 데는 아직 많은 문제점과 현실적인 제약이 있다[12]. 예를 들어 도구의 선택에 있어서 외국의 공학적 도구를 그대로 수입하여 사용하기에는 비용과 언어적 제약, 프로그래밍 언어 학습, 소프트웨어 유지 및 설치 등의 여러 가지 제약이 따른다.

2005년에 발표된 Sage²⁾는 서버(Server)용 무료 공개 소프트웨어로 자신의 PC에 설치할 필요 없이 인터넷 환경만 있으면 어디서나 사용이 가능하다. 또한 Sage를 이용하여 워크시트(worksheet)³⁾를 제작하고, 그 워크시트에서 Sage명령과 수학연산에 적합한 파이썬(python)명령들을 직접 실행해볼 수 있다. 이러한 워크시트는 다른 사람에게도 공개할 수 있어, 이를 이용하면 사용자는 수학연산을 할 때, 기존의 공개된 워크시트의 명령어를 복사하여 새롭게 프로그래밍을 하지 않고도 쉽게 수학연산을 할 수 있다. 이렇게 공개된 워크시트는 표 1의 주소에서 얻을 수 있다.

2) System for Algebra and Geometry Experimentation의 줄임말: <http://www.sagemath.org>

3) Sage에서 수학연산을 실행할 수 있는 각 문서.

표 1 공개된 Sage 워크시트 주소

	서버명	주소
성균관 대학교	Math1	http://math1.skku.ac.kr/pub/
	Math2	http://math2.skku.ac.kr/pub/
	Math3	http://math3.skku.ac.kr/pub/
	SKKU Single Cell	http://sage.skku.edu
KAIST	M-Day	https://sagenb.kaist.ac.kr:8066/pub/
SAGE	Alpha	http://alpha.sagenb.org/pub/

따라서 Sage를 이용하여 제작된 공학적 도구를 써서 교수는 강의 시간에 공개된 워크시트를 활용하여 대수적인 답을 찾을 수 있고 Sage의 상호작용 함수(interactive function) 기능을 활용하여 수학적 개념을 이해하기 쉽게 설명할 수 있다. 이렇듯 Sage는 앞서 언급한 공학적 도구 도입의 단점을 모두 극복하여 새로운 도구의 대안이 될 수 있다. 게다가 본 연구팀은 이미 Sage의 한글화에 성공하여 언어의 제약이 따르지 않는다[20]. 그리고 새롭게 Sage 명령어를 익히지 않고서도 기존의 공학적 도구(Mathematica, Matlab, Maple 등)들의 언어를 그대로 Sage에서 사용할 수도 있다.⁴⁾

본 논문에서는 기초 선형대수학에 제시된 중요한 개념들을 Sage를 이용하여 학습할 수 있도록 본 연구팀이 개발한 Sage 행렬계산기(II장) 및 선형대수학 웹 콘텐츠(III, IV장)를 소개 하고자 한다. 그리고 마지막 장에서는 이를 실제 수업(S대학교 2012년도 1학기 선형대수학 강좌)에 적용하여 Sage가 선형대수학 교육에 공학적 도구로서의 역할을 충분히 성공적으로 수행할 수 있음을 확인한다.

II. Sage 행렬계산기

실제적으로 사회에서 계산해야 하는 문제는 상당히 큰 크기의 행렬 문제로 귀결되므로 반드시 적절한 계산 도구를 필요로 한다. 사회의 많은 문제는 수학적 모델링과 선형화 과정을 거쳐 대부분 행렬의 연산으로 해결할 수 있는 선형모델로 바뀐다. 그리고 이러한 행렬계산은 그 크기에 따라서 큰 난이도의 차이를 가진다. 이와 같이 보통 선형대수학이 실제 사회에서 문제에 적용되어 쓰일 경우 그 크기가 상당히 큰 경우가 많다.

4) Maple 인터페이스 : <http://www.sagemath.org/doc/reference/sage/interfaces/maple.html>

MATLAB 인터페이스 : <http://www.sagemath.org/doc/reference/sage/interfaces/matlab.html>

Mathematica 인터페이스 :

<http://www.sagemath.org/doc/reference/sage/interfaces/mathematica.html>

그리고 배운 수학적 지식을 적절하게 활용하여 여러 가지 요인을 동시에 분석해야 하는 큰 크기의 문제를 실제로 해결할 수 있어야 한다[6].

이와 관련하여 본 장에서는 기본적인 행렬연산부터 LU, QR, SVD-분해까지 행렬과 관련된 대부분의 연산을 할 수 있는 Sage 행렬계산기를 소개한다.

1. Sage를 이용한 행렬계산기의 개발

표 2는 본 연구팀이 행렬계산기를 만드는 과정에서 기존의 무료 행렬계산기를 조사한 것이다. 총 26개의 콘텐츠를 조사하였는데, 표 2에서 알 수 있듯이 대부분의 계산기들은 행렬의 합, 차, 곱 같은 단순계산이나 역행렬, 행렬식 등을 위주로 만들어져 있음을 알 수 있다. 그러나 선형대수학에서 중요한 개념인 QR, LU, SVD-분해나 고유값 등을 구하고, 주어진 행렬이 허미시안(Hermitian) 및 유니타리(Unitary)임을 확인하여 주고, 연산의 범위를 복소수까지 확장한 콘텐츠는 많지 않음을 알 수 있다.

표 2 기존의 무료 행렬계산기들의 가능 연산의 개수 비교

허수범위	LU	SVD	QR	$A+B$	$A-B$	AB	A^{-1}	det
1	1	1	2	14	14	17	16	17
A^n	rank	adj	진치행렬	$\text{tr}(A)$	특성방정식	고유값	고유벡터	$[D : v]$
6	5	5	10	5	1	6	4	7

따라서 행렬의 대부분의 연산을 제공하는 Sage를 이용하여 행렬계산기를 제작함으로써 공학 및 기타 응용분야에서 많이 쓰이는 행렬의 단순계산 및 QR, LU, SVD-분해 및 행렬의 고유값, 고유벡터뿐만 아니라 선형연립방정식, 행렬의 최소다항식(minimal polynomial)등, 주어진 행렬을 가지고 할 수 있는 모든 연산을 충족시킬 수 있는 행렬계산기를 만드는 것이 중요한 과제임을 알 수 있다.

2. Sage 행렬계산기

본 연구에서 개발한 Sage 행렬계산기는 Sage 독립연산(Single Cell)⁵⁾ 서버를 이용한 행렬계산기⁶⁾로 그림 1과 같이 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 실수배 등의 기본적인 연산 외

5) 모든 웹페이지에 쉽게 내장되어 Sage 계산을 할 수 있도록 한 서버를 말한다.

<http://sagemath.org/eval.html> (Single Cell을 소개하는 Sage 홈페이지 주소)

<http://buzzard.ups.edu> (Single Cell을 이용한 Prof. Beezer의 홈페이지주소)

<http://sage.skku.edu> (성균관대학교에서 제공하는 독립연산 서버)

에 선형대수학의 중요한 개념인 행렬식, rank, trace, nullity, 고유값, 특성방정식 및 역행렬, 수반행렬, 전치행렬, 전치켈레행렬 등을 구할 수 있도록 제작되었다.

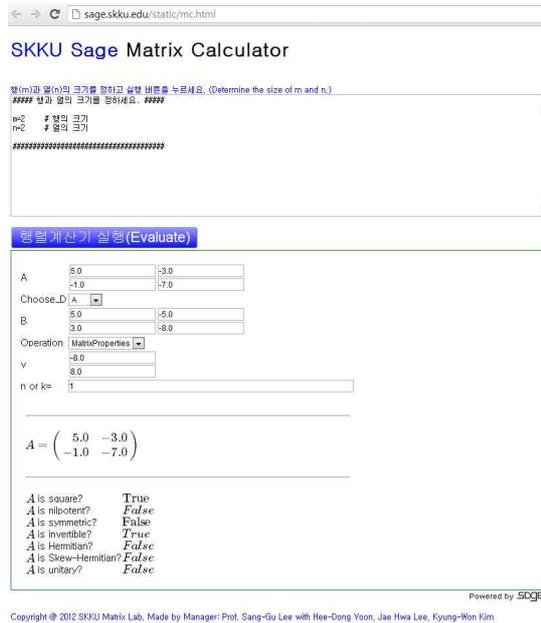


그림 1 독립연산 서버를 이용한 Sage 행렬계산기

현존하는 대부분의 웹기반 무료 행렬계산기가 포함하고 있지 않은, 그러나 선형대수학 교육에 꼭 필요한 연산(이는 본 장 4절에서 다룬다)인 LU, SVD, QR-분해 등도 계산할 수 있다. 열의 크기를 1로 선택하면 행렬을 벡터로 인식하여 벡터에 관한 연산을 수행할 수 있는데 벡터의 내적, 외적, 크기(norm)를 계산할 수 있다. 그리고 행렬을 구성하는 열벡터들을 이용하여 Gram-Schmidt 정규직교화 과정을 수행하여 행렬의 기본공간의 기저를 계산할 수도 있다. 기존 행렬계산기가 실수범위 혹은 유리수범위에서 계산이 가능하였다면 본 행렬계산기는 계산 범위를 복소수까지 확장하여 사용할 수 있어, 선형대수학의 거의 모든 문제를 해결할 수 있다.

주어진 Sage 명령어에서 사용자가 행렬의 크기를 수정하고, 실행하면 자신이 선택한 행렬의 크기와 원소가 -10에서 10사이의 정수(필요시 얼마든지 제한조건을 조정할 수 있다)로 임의 생성된 행렬을 볼 수 있다. 따라서 처음 실행했을 때도 사용자가 행렬의 원소를 일일이 입력할 필요가 없다. 일단 연산이 한 번 실행된 후에는 자신이 원하는

6) <http://sage.skku.edu/static/mc.html>

대로 행렬의 원소를 직접 입력하며 수정할 수 있다. 이 때 사용자는 자신이 선택한 행렬이 어떤 성질을 갖는 행렬인지 구체적으로 볼 수 있고, 원하는 연산 버튼을 선택하여 클릭하면 다양한 행렬계산을 수행할 수 있다(이 기능에 대하여는 본 장 3절에서 자세히 다룬다).

3. Sage 행렬계산기의 기본구조

이제 행렬계산기의 구조를 좀 더 자세히 살펴보자. 일단 행렬계산기는 그림 2와 같이 크게 행렬의 크기를 결정하는 부분과 행렬의 계산을 실행하는 부분으로 나눌 수 있다.

먼저 자신이 계산할 행렬의 크기와 벡터의 크기를 설정하고, 자신이 원하는 행렬의 연산을 선택하면 된다. 그림 2의 아래쪽 그림은 연산 부분을 설명한 것으로 'Choose_D'에서 필요한 연산을 선택한다. A , B , $A-B$, $A+B$, AB^* , B^*A , AA^* , A^*A 등을 선택할 수 있다. 행렬의 원소가 실수일 경우 A^* 와 A^T 는 일치한다.

앞서 'Choose_D'에서 행해진 연산 결과는 D 에 저장되며 'Operation' 항목에서 추가 연산을 선택하면 D 에 대하여 거듭제곱, rank, 역행렬, 상수배, 행렬식, 정사영, nullity, 특성방정식 등 추가 연산이 진행된다.

그림 2 행렬계산기의 실행 구조

4. Sage 행렬계산기의 기능과 이용방법

Sage 행렬계산기를 실행하기 위해서는 “<http://sage.skku.edu/static/mc.html>”에 접속을 해도 되지만, 해당 주소에서 제공 하는 코드를 복사하여 다른 독립연산 서버나 일반 Sage 서버의 워크시트에 붙여 넣는 방법만으로도 쉽게 실행시킬 수 있다. 이렇게 한 번 실행된 후에는 행렬의 크기를 결정하고, 행렬의 원소를 입력한 후 원하는 행렬 연산을 진행하면 된다.

만일 n 차 정사각행렬 A, B 에 대하여 $A-B$ 의 rank 혹은 역행렬을 구하는 문제를 생각하여 보자. 기존의 계산기는 우선 $A-B$ 를 먼저 계산한 후 다시 그 값을 입력하여 rank 혹은 역행렬을 구해야 한다. 본 행렬계산기는 ‘Choose_D’를 이용하여 $A-B$ 를 계산하고 이를 동시에 D 로 정의한다. 그리고 ‘Operation’ 항목에서 $A-B$ 의 rank 혹은 역행렬을 계산할 수 있도록 하였다. ‘Choose_D’와 ‘Operation’ 항목을 적절히 조합하면 계산된 결과를 다시 입력할 필요 없이 다양한 연산이 가능하다.

Sage 행렬계산기는 총 31개의 행렬연산을 제공한다. 그 중 일부를 살펴보면 표 3과 같다. 이 Sage 행렬계산기의 가장 큰 특징은 행렬계산기에 대한 Sage 코드가 이미 공개되어 있기 때문에, 자신이 원하는 연산을 추가하거나 원하지 않는 연산을 삭제할 수 있다는 것이다. 이를 적절히 활용하면 앞서 설명한 연산의 종류보다 더 많은 연산을 사용하거나 자신이 원하는 연산만을 선택하여 사용할 수 있다.

표 3 행렬계산기에 포함된 Sage 명령어의 일부

연산	실제 입력되는 값	설 명
D^k	행렬 ^k	행렬의 k 승
$\text{rank}(D)$	행렬.rank()	행렬의 계수(rank)
D^{-1}	행렬.inverse()	행렬의 역행렬(inverse)
kD	k *행렬	행렬의 상수배
$\det(D)$	행렬.determinant()	행렬의 행렬식(determinant)
$\text{adj}(D)$	행렬.adjoint()	행렬의 수반행렬
D^T	행렬.transpose()	행렬의 전치행렬(transpose)

연산	실제 입력되는 값	설 명
charpoly(D)	행렬.charpoly()	행렬의 특성다항식
LU	D,L,U =행렬.LU()	행렬의 LU분해
SVD	U,S,V =행렬.SVD()	행렬의 SVD분해
QR	Q,R =행렬.QR()	행렬의 QR분해
LSE	행렬\벡터	선형연립방정식의 해
eigenvalues	행렬.eigenvalues()	행렬의 고유값
eigensystem	행렬.eigenvectors_right()	행렬의 고유벡터

본 연구팀은 Sage 명령어를 한글설명과 함께 그림 3과 같이 제공한다.⁷⁾ 이 명령어 들을 이용하면 본 원고에서 제공하는 행렬계산기를 가지고 자신이 원하는 자신만의 새로운 행렬계산기를 쉽게 만들 수 있다.



그림 3 Sage 한글판 참고자료

주어진 행렬계산기를 사용자 맞춤형 도구로 개발하는 방법은 다음과 같다. 우선 자신이 원하는 연산을 만들 부분에 그림 4와 같이 행렬계산의 명령어를 추가한다(여기서는 nullity의 계산을 예로 들었다). 다음으로 자신이 원하는 행렬 연산의 명령어를 그림 5와 같이 추가하면 된다.

7) <http://galois09.skku.ac.kr/sage-spt/quickref-linalg-kor.pdf>

```
import pylab
Operation = ['<span class="math">D{n}</span>',
            'rank(D)',
            '<span class="math">D{-1}</span>',
            '<span class="math">kD</span>',
            'det(D)',
            'adjD',
            '<span class="math">D{T}</span>',
            'tr(D)', '[D:v]', 'nullity(D)',
            'charpoly(D)',
            '<span class="math">Proj_ {a }</span>']
```

그림 4 연산 추가의 예

```
if Operation == 'rank(D)':
    A1=A.rank()
    show("rank(A)=%s"%A1)

if Operation == 'nullity(D)':
    A1=A.nullity()
    show("nullity(A)=%s"%(latex(A1)))
```

그림 5 Sage 명령어 추가의 예

III. Sage를 이용한 기초 선형대수학 콘텐츠

이 장에서는 본 연구팀이 그동안 제작한 Sage 관련 명령어 중 선형대수학과 관련된 내용을 종합한 콘텐츠를 소개한다. 인터넷⁸⁾을 통해 접속하면, 누구나 쉽게 Sage를 활용하여 선형대수학을 효과적으로, 그리고 양방향(interactive)으로 학습할 수 있다.

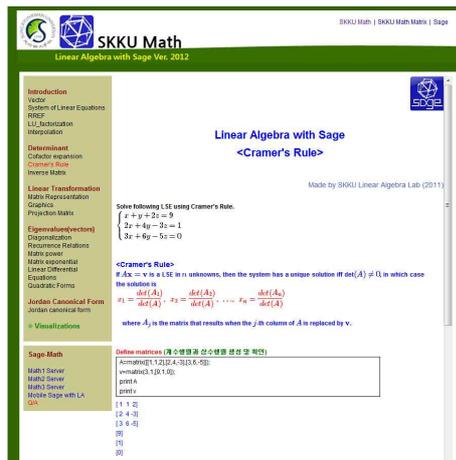


그림 6 선형대수학 웹 콘텐츠 중 크래머 법칙

8) <http://matrix.skku.ac.kr/2012-sage/sage-la>
 (최적화된 사용자 환경을 위해 웹 브라우저는 크롬(Chrome)의 사용을 권장한다.)
<http://www.google.com/chrome>

그림 6은 선형대수학 웹 콘텐츠 중 하나인 크래머 법칙⁹⁾을 보여준다. 그리고 본 콘텐츠가 포함하고 있는 선형대수학의 기본 개념은 표 4와 같다.

이제 Sage를 이용하여 위에 제시한 기초 선형대수학의 개념들을 어떻게 학습할 수 있을지 선형연립방정식의 해를 구하는 문제를 통해 자세히 살펴보자.

표 4 본 콘텐츠가 제공하는 선형대수학 주요 개념

Chapter	선형대수학의 개념
Introduction	Vector
	System of Linear Equations
	RREF
	LU Factorization
	Interpolation
Determinant	Cofactor Expansion
	Cramer's Rule
	Inverse Matrix
Linear Transformation	Matrix Representation
	Graphics
	Projection Matrix
Eigenvalues (-vectors)	Diagonalization
	Linear Algebra with Sage
	Matrix Power
	Matrix Exponential
	Linear Differential Equations
Jordan Canonical Form	Quadratic Forms
Jordan Canonical Form	Jordan Canonical Form

1. 알고리즘과 Sage 실습

그림 7은 선형연립방정식 콘텐츠¹⁰⁾를 나타낸다. 이 페이지에는 먼저 선형연립방정식의 해법에 대한 단계별 알고리즘과 이를 계산할 수 있는 Sage 명령어가 담겨 있다. 그리고 본 콘텐츠에서 그림 8과 같이 바로 실습할 수 있도록 홈페이지 오른쪽 윗부분에 Sage 버튼을 추가 하였다. 이를 통해 학습한 내용을 역동적으로 다시 시뮬레이션 할 수 있고, 이미 해당하는 Sage의 명령어는 주어져 있기 때문에 추가로 프로그래밍을 하지 않아도 기존의 숫자를 바꾸어 새로운 문제를 해결할 수도 있다. 이에 대한 내용은 아래 제시한 콘텐츠¹¹⁾의 첫 화면에 있는 동영상상을 통하여 확인할 수 있다.

9) 크래머 법칙 : <http://matrix.skku.ac.kr/2012-sage/sage-la/2-2.htm>

10) <http://matrix.skku.ac.kr/2012-sage/sage-la/1-2.htm>

11) How to use (이용법) : <http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/>

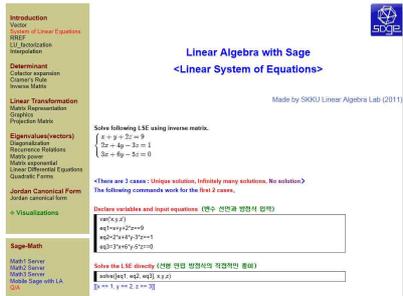


그림 7 선형연립방정식 콘텐츠

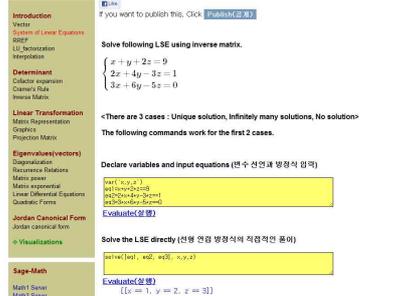


그림 8 Sage 실습 예

2. SNS 기능을 통한 실습 결과의 공유

학생들은 학교에서 제공되는 기존의 정적인 학습정보와는 다른 좀 더 전문적인 것을 기대하고, 또한 교수나 학교의 SNS¹²⁾에 제공되는 정보들에 의해 많은 학습동기를 얻는다[22]. 그리고 SNS는 학생들로 하여금 온라인 환경에서 학습을 하는데 더 개인화된 경험이 가능하게 하고 위키, 블로그, 토론 게시판 및 기타 웹 2.0¹³⁾ 콘텐츠를 통해 전통적인 학습 환경에서 배웠던 것들을 더 보완할 수 있도록 도와준다[17]. 그리고 트위터나 페이스북과 같은 SNS를 이용하여 질문을 했을 경우, 다른 학생이나 교수는 그 질문에 대하여 충분히 심사숙고한 답변을 줄 수 있다. 따라서 시간과 장소에 대한 제한이 없어 좀 더 정확한 도움을 받을 수 있다.

특히 우리나라의 SNS 사용실태를 살펴보면, 그림 9와 같이 대학(원)생의 76.8%가 SNS 이용자이고 초·중학생과 고등학생의 이용률은 각각 71.2%와 67.4%로 나타나, 일반인에 비해 학생의 SNS 이용률이 상대적으로 높은 것으로 조사되었다.¹⁴⁾

12) SNS(Social Network Service) : 사용자 간의 자유로운 의사소통과 정보 공유, 그리고 인맥 확대 등을 통해 사회적 관계를 생성하고 강화시켜주는 온라인 플랫폼을 의미한다.

13) 단순한 웹사이트의 집합체를 웹 1.0이라 하고, 웹 2.0은 웹 애플리케이션을 제공하는 하나의 완전한 플랫폼으로의 발전한 상태를 지칭한다. 이는 개방과 참여, 공유로 대표되는 인터넷 환경을 말한다.

14) 방송통신위원회, 인터넷 이용자의 SNS이용실태조사, 2009.



그림 9 학력별 SNS 이용률 (%)

따라서 본 연구에서는 학생들의 인터넷 상에서의 학습효과를 최대한으로 이끌어내기 위하여 기존의 공학 도구에 그림 11과 같이 SNS를 적용하였다.

알고리즘 학습과 Sage 실습이 끝나면 새롭게 자신이 풀어본 문제를 SNS를 사용하여 다른 사람과 공유할 수 있다. 이 기능을 통해 교수나 튜터는 학생들의 질문에 대한 즉각적인 대답을 할 수 있다. 그 방법은 다음과 같다.

- 1) 그림 8의 'Publish(공개)' 버튼을 클릭하면 그림 10과 같이 Sage로 실습한 내용이 공개된다.
- 2) 그림 10의 상단에 SNS 버튼 중 하나를 클릭하면 공개된 페이지를 다른 사람들과 공유할 수 있다.
- 3) 예를 들어 페이스북(Facebook)을 클릭하면 먼저 로그인 화면으로 이동하는데 자신의 아이디로 로그인 하면 그림 11과 같이 '링크공유'를 할 수 있도록 페이지가 나타난다. '링크공유'를 클릭하면 자신의 페이스북에 공개한 페이지의 주소가 링크된다.

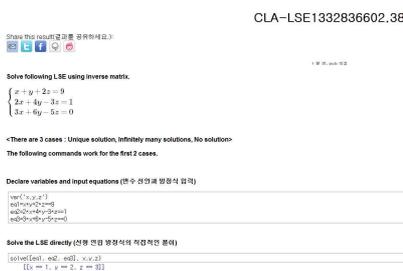


그림 10 Sage 실습 내용 공개



그림 11 SNS기능을 통한 실습 공유

IV. Sage의 상호작용 함수를 이용한 선형대수학 콘텐츠

이번 장에서는 Sage의 상호작용 함수를 이용하여 개발한 선형대수학의 콘텐츠를 제시한다. 제시된 웹 주소¹⁵⁾를 통해 사용자는 Sage의 명령어에 익숙하지 않아도 선형대수학의 개념을 바로 학습할 수 있다. 그림 12는 상호작용 함수를 이용한 콘텐츠의 한 예¹⁶⁾를 보여준다.

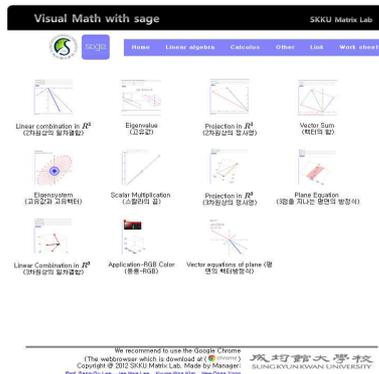


그림 12 상호작용 함수를 이용한 Sage 선형대수학 콘텐츠

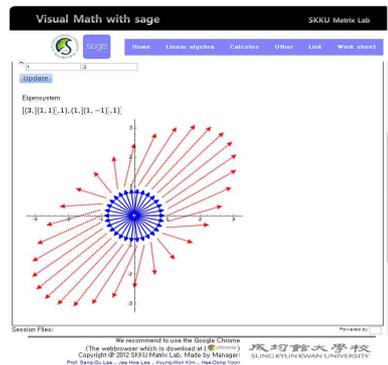


그림 13 고유값 및 고유벡터의 시각화

본 콘텐츠는 Sage의 상호작용 함수와 관련하여 선형대수학뿐만 아니라 미적분학에 대한 내용까지 담고 있다. 그림 13은 선형대수학의 고유값 및 고유벡터의 개념을 시각화한 예¹⁷⁾이다. 이 콘텐츠는 모두 Sage의 독립연산 서버를 기반으로 제작되었기 때문에 사용자는 Sage 서버에 추가로 로그인 할 필요 없이 직접 선형대수학의 개념을 학습할 수 있다. 본 연구진은 사용자의 편의를 위하여 독립연산 서버를 이용한 참고자료의 기능도 첨가하였다. 홈페이지의 Worksheet 탭¹⁸⁾에서 Sage 독립연산 서버와 Sage 참고자료를 사용방법과 함께 제시해 주었다(그림 14 참조). 사용자는 참고자료에서 명령어를

- 15) <http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/>
- 16) <http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/1.html>
- 17) <http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/1/vec5.html> 에 접속하여 ‘Run’ 을 클릭하면 바로 확인할 수 있다.
- 18) <http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/worksheet.html>

복사하여 바로 옆의 셀(Cell)에 붙여 넣고 'Run(실행)'을 클릭하면 바로 결과를 확인할 수 있다.



그림 14 Sage 독립연산과 참고자료

V. 개발된 Sage 콘텐츠의 강의 적용 분석

이번 장에서는 Sage 행렬계산기 및 Sage를 이용한 선형대수학 콘텐츠를 실제 수업 (S대학교 2012년도 1학기 선형대수학 강좌)에 적용하여 학생들의 반응을 확인하면서, Sage가 선형대수학 교육에 공학적 도구로서의 역할을 충분히 성공적 수행할 수 있음을 확인한다.

1. 공학적 도구(Sage)를 사용한 수업에서의 학생들의 반응(Feedback)

S대학교 2012년도 1학기 선형대수학 강좌 종강과 함께 학생들을 대상으로 수업에 대한 설문조사를 한 결과 표 5와 같이 대체적으로 모든 항목에서 76.8% 이상의 긍정적인 결과를 얻었다. (5: 매우긍정, 1: 매우부정)

공학적 도구 및 콘텐츠를 이용하여 진행한 수업에 대하여 학생들은 교수자가 자신의 능력을 발휘하도록 도움을 주었고 그로 인하여 새로운 지식을 획득하고 지식수준이 향상되었다는데 90.8%이상의 긍정적인 반응을 주었다고 대답하였다. 또한 기존의 일반 수업과는 달리 수학 수업에 도구를 사용함으로써 실제 문제해결 방법을 습득할 수 있었고

그로 인하여 학생 자신이 공부하는 학습주제를 더 잘 이해할 수 있음을 확인할 수 있었다.

표 5 공학적 도구(Sage)를 사용한 수업에서의 학생들의 반응 (Feedback)

학생	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	AVR
1. 수업에 적극적으로 참여하였다.	4	5	3	4	4	5	3	5	5	5	3	4	4	4	4	4	2	2	3	3.84
2. 교수는 학생들의 능력을 발휘하도록 도와주었다.	3	5	4	5	4	5	5	5	5	4	5	5	5	5	5	5	4	5	4	4.68
3. 이 과정을 통하여 통해서 새로운 지식을 획득하였고 지식수준이 향상되었다.	4	5	5	4	4	5	5	5	5	4	5	5	5	4	5	4	5	4	3	4.53
4. 이 과정을 통하여 추론기술을 향상하였다.	2	5	5	4	4	5	4	3	5	4	4	4	4	5	4	3	4	3	3	3.95
5. 이 과정을 통하여 자기주도적 학습기술을 습득하였다.	4	5	3	4	4	5	4	4	5	4	5	5	5	4	5	3	3	4	4	4.26
6. 이 과정을 통하여 문제해결기술을 습득하였다.	4	5	5	5	4	5	4	4	5	5	4	5	5	5	4	5	3	3	4	4.42
7. 이 과정을 통하여 학습운영기술을 습득하였다.	3	5	4	4	4	5	5	4	5	5	4	5	5	5	3	3	3	3	4	4.16
8. 이 과정을 통하여 전문성이 향상되었다.	3	4	4	5	4	5	4	4	5	3	4	4	5	3	4	3	3	4	4	4
9. 이 과정은 실제 연구상황과 유사하였다.	1	4	4	3	4	5	4	2	4	5	4	5	4	5	4	3	4	3	5	3.84
10. 평가 방법이 공정하였다.	4	5	5	4	5	5	4	5	4	4	4	5	4	3	5	5	3	4	4	4.37
11. 문제해결을 하면서 학습주제를 더 잘 알게 되었다.	4	5	5	5	4	5	4	4	5	5	4	5	5	5	3	5	5	3	4	4.47
12. 학습과정에서 학습주제와 관련한 활발한 의사소통이 이루어졌다.	4	2	3	5	4	4	3	4	4	5	4	5	5	5	5	1	3	4	3.95	
13. 학습결과는 문제해결결과를 통해서 산출되었다.	3	3	3	5	4	5	5	4	5	4	5	5	5	4	5	1	3	4	4.11	

2. 공학적 도구(Sage)를 사용한 수업에서의 그룹 평가(Group Evaluation)

표 6과 같이 그룹 평가에 대해서 학생들의 반응은 모든 항목에서 기대이상으로 긍정적인 결과를 얻었다. 특히 주어진 문제를 공학적 도구를 이용하여 동료들과 같이 해결하는 과정을 통하여 그룹학습이 매우 긍정적으로 진행되었음을 확인할 수 있었다. (6: 매우긍정, 1: 매우부정)

표 6 공학적 도구(Sage)를 사용한 수업에서의 그룹 평가(Group Evaluation)

학생	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	AVR
1. 온라인-오프라인 출석을 규칙적으로 하였다.	6	5	5	5	5	5	6	6	5	6	6	6	6	5	6	6	5	6	5.56
2. QnA에 적극적으로 참여하였다.	5	3	4	4	5	6	4	6	4	6	6	6	6	5	6	5	6	5	5.11
3. QnA 내용에 적합한 질문과 응답을 하였다.	5	3	4	6	5	6	5	6	4	6	5	6	6	5	4	4	6	5	5.06
4. 동료에게 도움에 되는 지식과 정보를 제공하였다.	5	4	6	6	5	5	5	6	4	5	5	5	6	5	6	4	6	4	5.11
5. 다른 동료의 의견을 존중하였다.	5	6	4	6	5	6	5	6	3	6	5	6	6	5	6	5	6	5	5.33
6. QnA 운영 및 의견수렴과정에 긍정적으로 기여하였다.	5	4	4	5	5	6	4	6	4	5	5	6	6	5	5	6	6	4	5.06
7. 이번 강좌의 동료와 다른 수업도 듣고 싶다.	5	6	5	5	5	6	6	6	4	5	5	6	6	6	5	6	5	5	5.39

또한, 학생들의 수업에 대한 서술형 후기에서도 공학적 도구, 특히 Sage의 활용이 학습에 많은 도움이 되었다는 다양한 의견을 구체적으로 확인할 수 있었다.

VI. 결론

자연계열 학생은 물론 공학계열과 사회과학계열 학생도 필수적으로 익히는 선형대수학은 개념에 대한 이론교육에만 그치는 것이 아니라 실제로 큰 크기의 행렬과 관련된

실제 계산이 자연스럽게 요구되는 강좌이다. 따라서 강의와 학습에 활용가능한 공학적 도구의 사용은 필수적이다. 그러나 공학적 도구 도입의 필요성과 취지에 대한 긍정적인 인식에도 실제 강의에 적용하는 데는 도구의 선택과 그에 따른 구입비용, 사용법을 배우기 위한 언어의 제약, 프로그래밍 언어 학습과 도구에 종속되므로 그로 인한 소프트웨어 유지 및 설치 등 여러 제약이 있었다.

본 논문에서는 대학수학교육에서의 공학적 도구 도입에 있어서 제기되는 문제점들을 해결할 수 있는 대안으로 Sage를 제시한다. 그리고 실제 그런 구현이 이루어진 모델의 하나로 선형대수학 교육에서 Sage를 이용한 웹 콘텐츠와 행렬계산기를 제시하였다. 먼저, Sage 관련 명령어 중 선형대수학과 관련된 내용을 모두 모아 사용자의 편의에 맞게 구성한 선형대수학의 웹 콘텐츠는 선형대수학의 거의 모든 개념에 대한 알고리즘, Sage 실습, SNS를 통한 공유기능을 갖고 있어 사용자가 쉽게 학습할 수 있도록 구성되었다. 그리고 Sage의 상호작용 함수를 이용하여 개발한 선형대수학 콘텐츠는 Sage 독립연산 서버를 통해 로그인 없이도 언제나 사용이 가능하며, 필수적인 개념들에 대한 실습 예제와 참고자료를 미리 만들어 두었기 때문에 Sage 명령어에 익숙하지 않은 사용자도 간편하게 실습을 할 수 있다. 마지막으로 행렬계산에 필수적인 행렬계산기는 선형대수학의 중요한 연산을 쉽게 수행할 수 있으며 기존의 많은 행렬계산기가 수행하지 못한 연산인 LU, SVD, QR등의 행렬분해와 복소수 범위에서의 연산이 가능하도록 설계되었다. 또한 행렬계산기의 알고리즘이 공개되어 있어 사용자는 자신이 원하는 연산만을 수행하도록 편집하거나 필요한 연산을 Sage 명령어를 이용하여 추가할 수 있다.

본 논문에서는 선형대수학 학습에 활용될 수 있도록 Sage를 이용하여 개발한 웹 콘텐츠와 행렬계산기의 구체적인 내용을 소개하였다. 이들은 모두 Sage를 이용하여 설계되었기 때문에 Sage의 장점을 활용하면 선형대수학 학습에 많은 도움을 줄 것으로 기대한다. 아울러 이는 대학수학교육 및 연구에서 다양한 수학적 개념을 직관적으로 확인하고 실습 및 활용하는 하나의 모델이 될 수 있다. 대학수학교육에서의 이런 변화는 추가비용 없이 바로 중등수학교육 현장으로 확산될 수 있다.

초록. 지난 20여 년간 선형대수학 교수학습과정에서 공학적 도구의 필요성이 지속적으로 제기되어 왔으며 실제 선형대수학 교재를 통하여 관련된 다양한 도구가 소개되었다. 그러나 한국 대학의 선형대수학 교육에서는 다양한 현실적인 이유로 도구 활용이 미진하였다. 따라서 오랜 기간 선형대수학의 이론 교육에만 치중한 경향이 있다.

본 논문에서는 한국의 대학수학교육 부분 중 공학적 도구 도입에서 제기되는 문제점과 어려움을 모두 해결할 수 있는 대안을 구체적으로 제시한다. 그리고 실제 대학수학교육에서 공학적 도구의 활용이 이루어진 모델의 하나로 Sage를 이용하여 개발한 선형대수학 웹 콘텐츠와 행렬계산기를 소개한다. 이를 활용하면 교육현장에서 선형대수학의 대부분의 개념을 언제, 어디서나 사용가능한 무료 도구와 함께 직관적으로 이해하고, 시각화 및 대용량 계산을 수시로 편리하게 수행하며 학습할 수 있다. 더구나 다루는 행렬의 크기를 자연스럽게 변형 및 확대할 수 있다. (<http://sage.skku.edu/static/mc.html>)

참 고 문 헌

- [1] 강은주·전명진·한동승, MAPLE과 함께 하는 선형대수학, 경문사, 2002.
- [2] 고래영·김덕선·박진영·이상구, 모바일 환경에서의 Sage-Math의 개발과 선형대수학에서의 활용, 韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集> **23** (3) (2009), 483-506.
- [3] 교육과학기술부, 수학교육 선진화 방안(교육과학기술부 2012년 1월 10일자 보도자료).
- [4] 김남희, 예비 수학 교사 교육에서 공학적 도구의 교육적 활용, 대한수학교육학회지 수학교육학연구 **21** (4) (2011), 345-359.
- [5] 김덕선·박진영·이상구, 21세기 선진형 ICT 수학 교육 방법론 모델, 韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集> **22** (4) (2008), 533-543.
- [6] 김덕선·이상구·정경훈·설한국, 선형대수학 교육에 적용되는 양방향 콘텐츠 기반의 MathML과 JAVA도구에 관한 연구, 韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育> **47** (1) (2008), 75-89.
- [7] 김창근·송영권·양영권, MATLAB을 이용한 선형대수학(개정판), 교우사 2008.
- [8] 김한두·김향숙·배화수·손병근, MATHEMATICA를 이용한 선형대수학(개정판), 교우사, 2004.
- [9] 송영권, 선형대수학-MATLAB을 이용한 문제풀이, 교우사, 2011.
- [10] 이상구·양정모·Wellman, R., 7차 교육과정의 수학에서의 공학적 도구의 이용에 관하여, 韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學教育 論文集> **11** (2001), 355-365.

- [11] 정인주·박종률·김우열·민정식·정화식, MATHEMATICA로 배우는 선형대수학, 경문사, 2000.
- [12] 조은애·권혁진, 수학교육에 공학적 도구의 활용에 대한 교사들의 인식과 활성화 방안, *교과교육연구* **1** (1) (2008), 1-29.
- [13] 주순중·김응환, 중학교 1학년 함수지도에서의 공학적 도구 활용에 관한 연구, *한국학교수학회논문집* **12** (3) (2009), 189-209.
- [14] Bahns, D. and Schweigert, C., *Softwarepraktikum - Analysis und Lineare Algebra: Ein MAPLE-Arbeitsbuch mit vielen Beispielen und Lösungen*, Vieweg+Teubner, 2007.
- [15] Butt, R., *Applied Linear Algebra and Optimization Using MATLAB*, Mercury Learning & Information, 2011.
- [16] Golubitsky, M. and Dellnitz, M., *Linear Algebra and Differential Equations Using MATLAB*, Brooks Cole, 1999.
- [17] Griffith, S. and Liyanage, L., An introduction to the potential of social networking sites in education, *Emerging Technologies Conference 2008*, 76-81.
- [18] Hardy, K., *Linear Algebra for Engineers & Scientists Using MATLAB*, Prentice Hall, 2004.
- [19] Hill, D. R. and Zitarelli, D., *Linear Algebra Labs with MATLAB*, Prentice Hall, 1996.
- [20] Kim, D. -S., Markowsky, G. and Lee, S. -G., Mobile Sage-Math for linear algebra and its application, *Electronic Journal of Mathematics and Technology* **4** (3) (2010), 1-13.
- [21] Kleinfeld, E. and Kleinfeld, M., *Understanding Linear Algebra Using MATLAB*, Prentice Hall, 2001.
- [22] Mazer, J. P., Murphy, R. E. & Simonds, C. J., I will see you on Facebook: The Effects of Computer-Mediated Teacher Self-Disclosure on Student Motivation, Affective Learning, and Classroom Climate, *Communication Education* **56** (1) (2007), 1-17.
- [23] Shiskowski, K. and Frinkle, K., *Principles of Linear Algebra with Maple*, Wiley, 2010.
- [24] Strampp, W., *Lineare Algebra mit Mathematica und Maple*, Vieweg, 1999.
- [25] Szabo, F., *Linear Algebra: An Introduction Using Mathematica*, Academic Press, 2000.
- [26] Torrence, B. F. and Torrence, E. A., *The Student's Introduction to Mathematica: A Handbook for Precalculus, Calculus, and Linear Algebra*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2009.

Department of Mathematics
Sungkyunkwan University
Suwon 440-746, Rep. of Korea
E-mail : sglee@skku.edu

Department of Mathematics
Sungkyunkwan University
Suwon 440-746, Rep. of Korea
E-mail : kwkim@skku.edu

Department of Mathematics
Hallym University
Chuncheon 200-702, Rep. of Korea
E-mail : jhlee2chn@hallym.ac.kr